

# Графы, представимые в виде слов: обзор результатов

С.В. Китаев, А.В. Пяткин

## Аннотация

Говорим, что буквы  $x$  и  $y$  чередуются в слове  $w$ , если при удалении из  $w$  всех букв кроме  $x$  и  $y$  получается либо слово вида  $xuxu\cdots$ , либо слово вида  $yxux\cdots$  (каждое из этих слов может иметь как четную, так и нечетную длину). Граф  $G = (V, E)$  представим в виде слова, если существует конечное слово  $w$  над алфавитом  $V$ , в котором буквы  $x$  и  $y$  чередуются тогда и только тогда, когда  $xy \in E$ .

Графы, представимые в виде слов, включают многие важные классы графов, например, графы пересечений хорд, 3-раскрашиваемые графы и графы сравнимости. В настоящей статье дается полный обзор известных результатов по теории графов, представимых в виде слов, включая самые последние достижения в этой области.

## 1 Введение

Теория графов, представимых в виде слов, является молодым, но довольно перспективным направлением. Это понятие было впервые введено в 2004 году [37] в связи с изучением полугрупп Перкинса, которые играют центральную роль в теории полугрупп с 1960 года, в частности, как инструмент для построения примеров и контрпримеров [44]. Однако, первым систематическим исследованием графов, представимых в виде слов, следует назвать появившуюся в 2008 году работу [35], с которой и началось развитие этой теории. К настоящему моменту имеется около 20 статей, в которых изучается это направление, а также книга С.Китаева и В.Лозина [34], посвященная теории графов, представимых в виде слов. Также для работы с такими графами имеется программный продукт,

сделанный М.Гленом [23], заметно облегчающий проведение исследований.

В [34] можно найти много примеров о связи графов, представимых в виде слов, с различными прикладными задачами, что обуславливает интерес к изучению этих графов. Они имеют применение в алгебре, теории графов, информатике, комбинаторике слов и теории расписаний. В частности, с теоретико-графской точки зрения они важны потому, что обобщают несколько фундаментальных классов графов (например, *графы пересечения хорд* [12], *3-раскрашиваемые графы* [4] и *графы сравнимости* [41]). Связь с теорией расписаний описана в [25].

Граф  $G = (V, E)$  называется *представимым в виде слова*, если существует конечное слово  $w$  над алфавитом  $V$ , в котором буквы  $x$  и  $y$  (где  $x \neq y$ ) чередуются тогда и только тогда, когда  $xy \in E$  (определение чередующихся букв дано в разделе 2). Естественным образом возникают следующие вопросы:

- Все ли графы представимы в виде слов?
- Если нет, то можно ли охарактеризовать графы, представимые или не представимые в виде слов?
- Как много имеется графов, представимых в виде слов?
- Чему равно число представимости графа, т.е. минимальная длина слова, представляющего заданный граф?
- Насколько трудно (с алгоритмической точки зрения) определить, является ли граф представимым в виде слова или нет?
- Какие операции над графами сохраняют свойства представимости или непредставимости графа в виде слова?
- Какие графы из наиболее интересного для читателя класса графов представимы в виде слов?

В настоящей статье предлагается полный обзор по графам, представимым в виде слов. Хотя часть из представленных результатов встречались ранее в книге [34], в обзоре отражены также новейшие достижения в этой области. С другой стороны, некоторые обобщения теории графов, представимых в виде слов [29], которые обсуждаются в [34, Глава 6] в настоящий обзор не включены. Также ввиду ограниченности объема статьи, часть доказательств опущена, хотя основные идеи доказательств авторы, по возможности, пытаются в тексте отразить.

Отметим, что другие виды взаимосвязи между словами и графами встречались в литературе довольно часто. Наиболее известная из них - это слова *Прюфера* для деревьев [47]. Аналогичные взаимосвязи известны для *пороговых графов* [13], *графов букв* [45], *графов перестановок* [39], *графов пересечений вписанных многоугольников* [38], *почти периодических слов* (с переходом к числу Белла для свойств наследственных графов [3]), и ряда других графов [19, 7]. Более детальную информацию можно найти в [34, Глава 8].

Статья структурирована следующим образом. В разделе 2 вводится понятие графов, представимых в виде слов, а также числа представимости таких графов. Далее рассматриваются графы с числом представимости не более 3 и графы с большим числом представимости. В разделе 3 дается определение перестановочно представимых графов и обосновывается его важность. Графы, представимые в виде слов, избегающих заданного паттерна обсуждаются в разделе 4. Раздел 5 посвящен технике полутранзитивных ориентаций, которая играет ключевую роль при изучении графов, представимых в виде слов. Непредставимые в виде слов графы исследуются в разделе 6, а операции на графах — в разделе 7. В частности, рассматриваются операции дополнения, подразделения ребер, стягивания ребер, соединения графов ребром, склеивания графов по клике, замены вершины модулем, декартово произведение, корневое произведение и переход к реберным графам. В разделе 8 приводятся результаты, касающиеся вычислительной сложности, а также изучается представимость в виде слов плоских графов. Наконец, в разделе 10 приводятся открытые проблемы и направления для дальнейших исследований.

## 2 Графы, представимые в виде слов. Основные определения

Все неопределяемые в статье понятия можно найти в стандартных учебниках по теории графов [18, 51] или теории слов [5].

Пусть  $w$  — слово над некоторым алфавитом, а  $x$  и  $y$  — две его различные буквы. Говорим, что  $x$  и  $y$  *чередуются* в  $w$  если после удаления из  $w$  всех букв кроме копий  $x$  и  $y$  получится либо слово вида  $xuxy\cdots$ , либо слово вида  $yxux\cdots$  (длина кадного из этих слов может быть как четной, так и нечетной). Например, в

слове 2311251324132 буквы 2 и 3 чередуются, также как и буквы 4 и 5, а любая другая пара букв не чередуется.

**Определение 1.** *Граф  $G = (V, E)$  является представимым в виде слова если существует такое слово  $w$  над алфавитом  $V$ , что буквы  $x$  и  $y$ ,  $x \neq y$  чередуются в  $w$  тогда и только тогда, когда  $xy \in E$ . (По определению,  $w$  должно содержать каждую букву из  $V$ .) Будем также говорить, что слово  $w$  представляет  $G$ , а также, что  $w$  является представляющим словом.*

Заметим, что Определение 1 не зависит от выбора меток вершин, так что граф  $G$  может считаться непомеченным. Отметим также, что слов, представляющих один и тот же граф, может быть бесконечно много. Например, каждый полный граф  $K_n$  можно представить произвольным числом конкатенаций одной и той же перестановки  $\pi$  над множеством  $\{1, 2, \dots, n\}$ , а для представления безреберного графа  $E_n$  с множеством вершин  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  подходит любое слово вида  $w_1 1 2 \dots n n(n-1) \dots 1 w_2$ , где  $w_1$  и  $w_2$  — произвольные слова над алфавитом  $V$ .

Класс графов, представимых в виде слов, является наследственным, т. е. замкнутым относительно удаления вершин (действительно, если слово  $w$  представляет граф  $G$ , то слово  $w'$ , полученное из  $w$  удалением всех копий буквы  $v$ , представляет граф  $G' \setminus \{v\}$ ). Это наблюдение помогло найти единственную известную на сегодняшний день асимптотику для числа графов, представимых в виде слов [17], которая приведена ниже.

**Теорема 1** ([17]). *Число  $n$ -вершинных графов, представимых в виде слов, равно  $2^{\frac{n^2}{3} + o(n^2)}$ .*

## 2.1 $k$ -представимость и число представимости графа

Слово  $w$  называется  $k$ -униформным если каждая буква встречается в  $w$  ровно  $k$  раз. Например, слово 243321442311 3-униформно, а любая перестановка является 1-униформным словом.

**Определение 2.** *Граф  $G$  называется  $k$ -представимым в виде слова (далее будем для краткости писать  $k$ -представимым) если существует  $k$ -униформное слово  $w$ , представляющее его. В таком случае будем говорить, что  $w$   $k$ -представляет  $G$ .*

Следующий результат показывает эквивалентность определений 1 и 2.

**Теорема 2** ([35]). *Граф представим в виде слова тогда и только тогда, когда он  $k$ -представим для некоторого  $k$ .*

*Доказательство.* Очевидно,  $k$ -представимость влечет представимость в виде слова. Докажем обратное. Пусть слово  $w_0$  представляет граф  $G$ , причем каждая буква встречается в  $w_0$  не более  $k$  раз. Обозначим через  $A$  множество букв, встречающихся ровно  $k$  раз. Если  $A \neq V$ , то рассмотрим слово  $w'$ , полученное удалением из  $w_0$  всех букв из  $A$ . Пусть  $p(w')$  является его начальной перестановкой (т. е. перестановкой, которая получается удалением из  $w'$  всех кроме первой копий каждой буквы). Нетрудно проверить [35], что слово  $w_1 = p(w')w_0$  также представляет граф  $G$ . Если оно не является  $k$ -униформным, то повторяем ту же самую процедуру до тех пор, пока не получим  $k$ -униформное слово, представляющее  $G$ .  $\square$

Например, если  $k = 3$  и  $w_0 = 3412132154$ , то  $w_1 = 34253412132154$  и  $w_2 = 534253412132154$  представляют тот же самый граф, причем последнее слово является 3-униформным.

Используя те же аргументы, что и в теореме 2, можно доказать, что каждый граф, представимый в виде слова, имеет бесконечно много слов, которые его представляют.

**Теорема 3** ([35]). *Любой  $k$ -представимый граф  $G$  является также  $(k + 1)$ -представимым.*

Из теоремы 2 вытекает корректность следующего определения.

**Определение 3.** Числом представимости графа  $G$  называется минимальное  $k$ , для которого  $G$  является  $k$ -представимым. Для непредставимых графов (существование которых будет показано ниже) можно считать  $k = \infty$ . Обозначим через  $\mathcal{R}(G)$  число представимости графа  $G$  и положим  $\mathcal{R}_k = \{G : \mathcal{R}(G) = k\}$ .

Очевидно,  $\mathcal{R}_1 = \{G : G \text{ полный граф}\}$ . Ниже дано описание класса  $\mathcal{R}_2$ .

## 2.2 Графы с числом представимости 2

Сначала приведем четыре примера классов графов с числом представимости 2, а именно, безреберные графы, деревья и леса, циклы

и лестницы. Далее мы установим результат, что графы с числом представимости 2 есть в точности графы пересечения хорд.

**1. Безреберные графы.** Поскольку при  $n \geq 2$  граф  $E_n$  не является полным, то  $\mathcal{R}(E_n) \geq 2$ . С другой стороны, как показано выше,  $E_n$  представим в виде конкатенации двух перестановок, а значит  $\mathcal{R}(E_n) = 2$ .

**2. Деревья и леса.** Покажем по индукции, что любое дерево  $T$  является 2-представимым, а значит при наличии в  $T$  не менее трех вершин  $\mathcal{R}(T) = 2$ . Если в дереве 1 или 2 вершины, то его можно представить словом 11 или 1212 соответственно. Пусть любое дерево на  $n - 1$  вершине является 2-представимым при  $n \geq 3$ . Рассмотрим дерево  $T$  на  $n$  вершинах, и пусть  $x$  является в нем листом, соединенным с вершиной  $y$ . Удалив  $x$ , получим дерево  $T'$ , которое можно представить 2-униформным словом вида  $w_1 y w_2 y w_3$  где подслова  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w_3$  не содержат буквы  $y$  (отметим, что некоторые из этих подслов могут оказаться пустыми). Тогда нетрудно убедиться, что слово  $w_1 y w_2 x y w_3$  2-представляет исходное дерево  $T$ . Заметим, что слово  $w_1 x y w_2 y w_3$  также 2-представляет  $T$ .

Если лес  $F$  содержит несколько компонент (деревьев), то конкатенация 2-униформных слов, представляющих каждое дерево, очевидно 2-представляет  $F$ . Таким образом, для любого леса  $F$  хотя бы с двумя деревьями имеем  $\mathcal{R}(F) = 2$ .

**3. Циклы.** Отметим, что слово и его циклический сдвиг могут вообще говоря, представлять разные графы (например, 112 и 121). Однако в случае униформного слова циклический сдвиг всегда представляет тот же самый граф.

**Утверждение 4** ([35]). *Пусть  $w = uv$  является  $k$ -униформным словом, представляющим граф  $G$ , где  $u$  и  $v$  — некоторые слова над алфавитом  $V$ . Тогда слово  $w' = vu$  также представляет  $G$ .*

Для 2-представления цикла  $C_n$  сначала найдем представление пути  $P_n$  на  $n$  вершинах, используя вышеописанный метод 2-представления деревьев, затем сдвинем полученное слово на 1 позицию вправо (это слово все еще будет представлять  $P_n$  по утверждению 4) и поменяем местами первые две буквы. Проиллюстрируем это на примере цикла  $C_6$ . Следуя индукции из предыдущего примера, строим 2-представление пути  $P_6$ :

$$1212 \rightarrow 121323 \rightarrow 12132434 \rightarrow 1213243545 \rightarrow 121324354656.$$

$n$	2-представление лестницы $L_n$
1	11'11'
2	1'212'21'2'1
3	12'1'323'32'3'121'
4	1'213'2'434'43'4'231'2'1

Таблица 1: 2-представление лестницы  $L_n$  при  $n = 1, 2, 3, 4$

Сдвиг на 1 позицию вправо дает слово 612132435465, и меняя местами первые две буквы этого слова получим слово 162132435465, 2-представляющее  $S_6$ .

**4. Лестницы.** *Лестницей*  $L_n$  называется граф на  $2n$  вершинах с  $3n - 2$  ребрами, полученный из двух копий пути  $P_n$  добавлением ребер, соединяющих копии одной и той же вершины. Пример лестницы при  $n = 4$  представлен на Рис. 1. В [32] по индукции доказано, что при  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{R}(L_n) = 2$ . Таблица 1 дает 2-представления  $L_n$  при  $n = 1, 2, 3, 4$ .

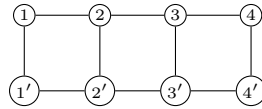


Рис. 1: Лестница  $L_4$

**5. Графы пересечения хорд.** Граф  $G$  называется *графом пересечения хорд*, если его вершинам можно поставить в соответствие хорды некоторой окружности, так, чтобы две вершины были смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им хорды пересекались. На Рис. 2 приведен пример такого графа и соответствующее ему семейство хорд.

Следующая теорема завершает характеристику класса  $\mathcal{R}_2$ .

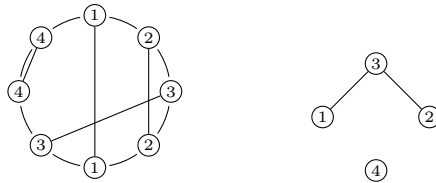


Рис. 2: Семейство хорд и соответствующий ему граф пересечения хорд

**Теорема 5.** *Имеет место равенство  $\mathcal{R}_2 = \{G : G \text{ является графом пересечения хорд, отличным от полного графа}\}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $G$  — граф пересечения хорд. Рассмотрим соответствующее ему семейство хорд. Можно считать, что все концы хорд различны. Начав с произвольного конца хорды, пойдём по окружности по часовой стрелке, записывая номера всех встречающихся концов хорд. В результате получится 2-униформное слово  $w$ , в котором буквы  $x$  и  $y$  чередуются тогда и только тогда, когда соответствующие им хорды  $x$  и  $y$  пересекаются, т. е. вершины  $x$  и  $y$  смежны в  $G$ . Например, для графа на Рис. 2 получим слово 13441232, которое 2-представляет изображённый граф. Обратно, пусть  $G$  2-представим в виде слова  $w$ . Выберем на окружности  $2n$  точек, пометим их по циклу буквами слова  $w$  и проведем хорды, соединяющие точки с одинаковыми метками. Нетрудно видеть, что данное семейство хорд порождает граф  $G$ . Таким образом,  $G$  является графом пересечения хорд тогда и только тогда, когда  $G \in \mathcal{R}_2$ , за исключением полных графов, которые лежат в классе  $\mathcal{R}_1$ .  $\square$

Отметим, что хотя класс графов пересечений хорд является наследственным, до настоящего времени неизвестно его представление на языке запрещенных подграфов. Таким образом, теорема 5 может быть использована для проверки принадлежности тех или иных графов к этому классу.

### 2.3 Графы с числом представимости 3

В отличие от графов с числом представимости 2, полной характеристики 3-представимых графов в настоящее время неизвестно. Однако, об этом классе имеется ряд интересных результатов, представленных ниже.

**1. Граф Петерсена.** В 2010, А.Коновалов и С.Линтон с помощью компьютера не только показали, что граф Петерсена (см. Рис. 3) не является 2-представимым, но и нашли два неэквивалентных 3-представления для него:

- 1387296(10)7493541283(10)7685(10)194562 and
- 134(10)58679(10)273412835(10)6819726495.

Приведем доказательство того, что граф Петерсена не лежит в классе  $\mathcal{R}_2$ .



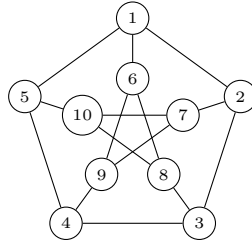


Рис. 3: Граф Петерсена

**Теорема 6** ([26]). *Граф Петерсена не является 2-представимым.*

*Доказательство.* Предположим, что граф Петерсена 2-представим. Пусть  $w$  является 2-униформным словом, которое его представляет. Обозначим через  $x$  такую букву в слове  $w$ , что число букв между двумя копиями  $x$  является минимальным. Поскольку граф Петерсена однородный степени 3, нетрудно видеть, что между двумя копиями  $x$  будет ровно три различные буквы (если бы букв было больше, то среди них было бы хотя бы две одинаковые, что противоречит выбору  $x$ ).

Из соображений симметрии и по утверждению 4 можно считать, что  $x = 1$  и слово  $w$  начинается с 1. Тогда буквы 2, 5 и 6 лежат между двумя копиями 1. Поскольку граф Петерсена реберно-транзитивный (т. е. для любых двух ребер  $e_1, e_2$  существует автоморфизм, переводящий  $e_1$  в  $e_2$ ; в частности, любое ребро можно сделать “внутренним”), а вершины 2, 5 и 6 попарно несмежны, можно считать, что  $w = 12561w_16w_25w_32w_4$  где  $w_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  являются какими-то (возможно, пустыми) словами, не содержащими букв 1, 2, 5, 6. Чтобы чередоваться с 6, но не чередоваться с 5, буква 8 должна быть в  $w_1$  и  $w_2$ . Аналогично, чтобы чередоваться с 2 и не чередоваться с 5, буква 3 должна быть в  $w_3$  и  $w_4$ . Но тогда  $w$  содержит подслово 8833, т. е. 8 и 3 несмежны, противоречие.  $\square$

**2. Призмы.** Призмой  $Pr_n$  называется граф, состоящий из двух копий цикла  $C_n$  с вершинами  $12 \cdots n$  и  $1'2' \cdots n'$  (здесь  $n \geq 3$  и вершины обоих циклов перечислены в циклическом порядке), соединенных ребрами вида  $ii'$  для  $i = 1, \dots, n$ . Например, трехмерный куб является призмой  $Pr_4$ .

**Теорема 7** ([35]). *Каждая призма  $Pr_n$  является 3-представимой.*

В [35] также было показано, что треугольная призма  $Pr_3$  не является 2-представимой. Аналогичное утверждение верно и для всех остальных призм.

**Теорема 8** ([32]). *Никакая призма  $Pr_n$  не является 2-представимой.*

Из теорем 7 и 8 следует, что  $Pr_n \in \mathcal{R}_3$  для всех  $n \geq 3$ .

**3. Раскраска графов в  $\mathcal{R}_3$ .** Теорема 12 ниже показывает, что  $\mathcal{R}_3$  не включает в себя класс двудольных графов, а значит и класс  $c$ -раскрашиваемых графов для любого  $c \geq 3$ .

Естественно задать обратный вопрос: верно ли, что класс  $\mathcal{R}_3$  лежит в классе  $c$ -раскрашиваемых графов для некоторого  $c$ ? Простой аргумент, связанный с заменой вершины в 3-представимой треугольной призме  $Pr_3$  на полный подграф определенного размера позволяет доказать следующий результат.

**Теорема 9** ([32]). *Класс  $\mathcal{R}_3$  не является подклассом  $c$ -раскрашиваемых графов ни для какого  $c$ .*

**4. Подразбиения графов.** Следующая теорема оказывается полезным инструментом для построения 3-представимых графов.

**Теорема 10** ([35]). *Пусть  $G = (V, E)$  — 3-представимый граф и  $x, y \in V$ . Обозначим через  $H$  граф, полученный из  $G$  добавлением к нему пути длины не менее 3, соединяющего  $x$  и  $y$ . Тогда  $H$  также 3-представим.*

**Определение 4.** *Подразбиением графа  $G$  называется граф, полученный из  $G$  заменой каждого ребра  $xy$  простым путем из  $x$  в  $y$ . Подразбиение называется  $k$ -подразбиением если каждый из этих путей имеет длину не меньше  $k$ .*

**Определение 5.** *Стягиванием ребра называется операция замены его концов одной вершиной, смежной со всеми соседями хотя бы одного из концов этого ребра, и удаления образовавшихся петель и параллельных ребер. Неориентированный граф  $G$  является минором неориентированного графа  $H$ , если  $G$  может быть получен из  $H$  операциями стягивания ребер, удаления вершин и удаления ребер.*

**Теорема 11** ([35]). *Для любого графа  $G$  существует бесконечно много 3-представимых графов  $H$ , содержащих минор  $G$ . Такие графы  $H$  могут быть получены из  $G$  с помощью 3-подразбиения.*

Для доказательства теоремы показывается, что 3-подразбиение любого графа  $G$  всегда 3-представимо. Также из теоремы 10 и доказательства теоремы 11 в [35] следует, что граф, полученный из безреберного графа добавлением путей длины не меньше 3 между некоторыми парами вершин, 3-представим.

Наконец, отметим, что замена каждого ребра на путь длины 2 дает двудольный граф, который представим по теореме 14 (см. раздел 3).

## 2.4 Графы с большим числом представимости

В теореме 29 мы увидим, что верхняя оценка на длину кратчайшего равномерного слова, представляющего  $n$ -вершинный граф  $G$  не превосходит  $2n^2$ , т. е. достаточно  $2n$  копий каждой буквы. Далее мы рассмотрим два класса графов, которые требуют ровно  $\lfloor n/2 \rfloor$  копий каждой буквы для своего представления. Это самое длинное кратчайшее слово, представляющее граф, известное в настоящий момент.

**Определение 6.** Граф-корона  $H_{n,n}$  — это граф, получаемый из полного двудольного графа  $K_{n,n}$  удалением совершенного паросочетания.

По теореме 14 ниже,  $H_{n,n}$  может быть представлен concatenацией перестановок, поскольку  $H_{n,n}$ , как и всякий двудольный граф, является графом сравнимости (см. раздел 3). Известно, что для представления  $H_{n,n}$  требуется  $n$  перестановок. Можно ли найти более короткое представление? Ниже показано, что да, но представление все равно получается длинным (линейно по  $n$ ).

Очевидно, что  $H_{1,1} \in \mathcal{R}_2$  и  $H_{2,2} \in \mathcal{R}_2$  ( $H_{2,2}$  можно представить словом  $121'2'212'1'$ ). Кроме того,  $H_{3,3} = C_6 \in \mathcal{R}_2$  и  $H_{4,4} = Pr_4 \in \mathcal{R}_3$ , как показано выше. Следующая теорема определяет число представимости  $\mathcal{R}(H_{n,n})$  для  $n \geq 5$ .

**Теорема 12** ([22]). При  $n \geq 5$  число представимости графа  $H_{n,n}$  равно  $\lfloor n/2 \rfloor$ .

Обозначим через  $G_n$  граф, полученный из графа-короны  $H_{n,n}$  добавлением все смежной вершины.

Граф  $G_n$  является наихудшим известным примером с точки зрения длины кратчайшего представляющего слова.

**Теорема 13** ([35]). Число представимости  $G_n$  равно  $\lfloor (2n+1)/2 \rfloor$ .

Неизвестно, существуют ли  $n$ -вершинные графы, число представимости которых лежит между  $\lfloor n/2 \rfloor$  и  $2n$  (эта оценка следует из теоремы 30).

### 3 Перестановочно представимые графы и их значение

Ориентация графа называется *транзитивной* если из наличия дуг  $u \rightarrow v$  и  $v \rightarrow z$  следует существование дуги  $u \rightarrow z$ . Неориентированный граф является *графом сравнимости*, если у него существует транзитивная ориентация. Известно, что наименьшим графом, не имеющим такой ориентации, является цикл  $C_5$ .

**Определение 7.** Граф  $G = (V, E)$  перестановочно представим, если он может быть представлен словом вида  $p_1 \cdots p_k$  где каждая  $p_i$  является перестановкой. Если в таком слове использовано  $k$  перестановок, то говорим, что  $G$  перестановочно  $k$ -представим.

Например, цикл  $C_4$  является перестановочно 2-представимым, в чем можно убедиться, рассмотрев слово 13243142.

Следующая теорема является простым следствием того факта, что любой частичный порядок можно задать как пересечение линейных порядков.

**Теорема 14** ([37]). Граф перестановочно представим тогда и только тогда, когда он является графом сравнимости.

Пусть теперь граф  $G$  получен из графа  $H$  добавлением все смежной вершины. Тогда имеет место следующая

**Теорема 15** ([35]). Граф  $G$  представим в виде слова тогда и только тогда, когда  $H$  перестановочно представим.

Колесом  $W_n$  называется граф, полученный из цикла  $C_n$  добавлением все смежной вершины. Нетрудно убедиться, что никакой нечетный цикл  $C_{2n+1}$  при  $n \geq 2$  не является графом сравнимости, а значит все нечетные колеса  $W_{2n+1}$  непредставимы при  $n \geq 2$ . На самом деле  $W_5$  является наименьшим непредставимым графом и единственным таким графом на 6 вершинах. В разделе 6 приведены другие примеры непредставимых графов.

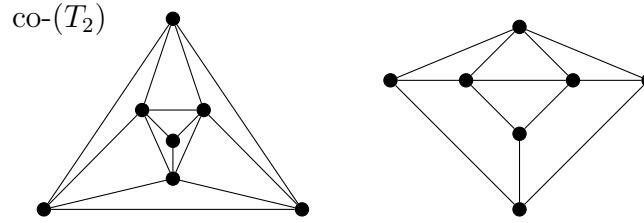


Рис. 4: Непредставимые графы, в которых окружение каждой вершины образует граф сравнимости

В качестве прямого следствия теоремы 15 получается следующее свойство подграфов, индуцированных окружением (множеством соседей) каждой вершины представимого графа.

**Теорема 16** ([35]). *Если граф  $G$  представим в виде слова окружение любой вершины в  $G$  является перестановочно представимым (т.е., графом сравнимости по теореме 14).*

Обратное к теореме 16 утверждение неверно, что можно продемонстрировать на примерах на Рис. 4 из работ [26] и [17] соответственно.

*Кликой* в графе называется подмножество попарно смежных вершин. Известно, что задача поиска в заданном графе  $G$  клики максимальной мощности является NP-трудной [8, 20]. Однако в классе графов, представимых в виде слов, эта проблема полиномиально разрешима что следует из теоремы 16, как показано ниже.

**Теорема 17** ([27, 28]). *Задача о максимальной клике полиномиально разрешима для графов, представимых в виде слов.*

*Доказательство.* Пусть граф  $G$  представим в виде слова. Тогда по теореме 16 окружение каждой его вершины индуцирует граф сравнимости. Известно, что задача о максимальной клике полиномиально разрешима для графов сравнимости. Значит и задача поиска максимальной клики в графе  $G$  также разрешима за полиномиальное время.  $\square$

## 4 Графы, представимые в виде слов с запрещенными паттернами

*Паттерном* называется слово над алфавитом  $\{1, 2, \dots, k\}$  для неко-

торого  $k$ , содержащее каждую букву из  $\{1, 2, \dots, k\}$  хотя бы один раз. Паттерн  $\tau = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_m$  встречается в слове  $w = w_1w_2 \cdots w_n$  если найдутся такие  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ , что  $\tau_1\tau_2 \cdots \tau_m$  изоморфно (в смысле порядка)  $w_{i_1}w_{i_2} \cdots w_{i_m}$ . Говорим, что  $w$  избегает  $\tau$  (или является  $\tau$ -избегающим), если  $\tau$  не встречается в  $w$ . Например, в слове 42316 встречается несколько паттернов 213 (а именно, 426, 436, 416, 216, 316), но нет паттерна 132. Изучение паттернов в словах и перестановках является очень популярным направлением (см., например, [2, 9, 11, 16, 31, 42, 49]).

В этом смысле естественным вопросом является следующий [34, Раздел 7.8]. Если дан паттерн или набор паттернов, то какие классы графов представляются в виде слов, избегающих данных паттернов?

В качестве простейшего примера, рассмотрим класс графов, представимых в виде слов, избегающих паттерн 21. Очевидно, такие слова имеют вид  $w = 11 \cdots 122 \cdots 2 \cdots nn \cdots n$ . Следовательно, если буква  $x$  встречается в слове хотя бы дважды, то соответствующая вершина является изолированной. При этом, множество вершин, соответствующее буквам, которые встречаются ровно один раз образуют клику. Таким образом, 21-избегающие слова представляют графы, являющиеся объединением полного графа и множества изолированных вершин.

Данному направлению посвящены работы [21] и [43], их результаты приводятся в данном разделе. До сих пор за исключением теоремы 18 и следствия 19 ниже только 132-избегающие и 123-избегающие слова рассматривались с точки зрения представления графов в виде таких слов. Результаты этих исследований представлены на Рис. 5, взятом из [43]. На этом рисунке (и вообще в этом разделе) мы используем упрощенное обозначение  $\tau$ -представимые графы для графов, представимых в виде  $\tau$ -избегающих слов.

Отметим, что в отличие от стандартного представления графов в виде слов, добавление дополнительных требований на отсутствие паттернов налагает существенные ограничения на нумерацию вершин (т.е. на то, каким образом помечены вершины графа). Например, 132-избегающее слово 543212345 представляет граф слева на Рис. 6, в то время как граф справа невозможно представить в виде 132-избегающего слова. Действительно, никакие три буквы из множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  не могут встречаться в слове ровно один раз, так как иначе соответствующие вершины будут смежны. Пусть 1, 2 и 3 встречаются хотя бы дважды. Если буква 5 встречается один

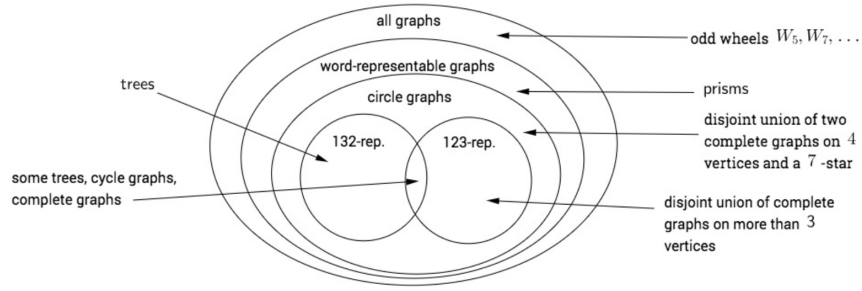


Рис. 5: Отношение между классами графов [43]

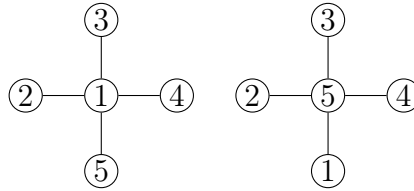


Рис. 6: 132-представимая (слева) и не 132-представимая (справа) нумерация одного и того же графа

раз, то она вместе с буквой 1 слева от нее и буквой 2 справа от нее образует паттерн 132. Если буква 5 встачается хотя бы дважды, то между первой и второй ее копиями каждая из остальных букв встречается ровно один раз, а среди букв из множества  $\{1, 2, 3\}$  хотя бы две встретятся либо слева от первой копии 5, либо справа от второй копии 5. В любом из этих случаев паттерн 132 неизбежен.

Поэтому говорим, что граф  $G$  не является  $\tau$ -представимым, если ни при какой нумерации вершин его нельзя представить в виде  $\tau$ -избегающего слова.

Следующая теорема имеет огромный потенциал для изучения  $\tau$ -представимых графов для паттернов  $\tau$  длины 4 или больше.

**Теорема 18** ([43]). *Пусть  $G$  — граф, представимый в виде слова, избегающего паттерна  $\tau$  длины  $k+1$ . Пусть  $x$  — вершина в графе  $G$  степени  $d(x) \geq k$ . Тогда каждое слово  $w$ , которое не содержит  $\tau$  и представляет  $G$ , содержит не более  $k$  копий буквы  $x$ .*

*Доказательство.* Если в слове  $w$  имеется не менее  $k+1$  копий буквы  $x$ , в нем есть фактор (подслово из подряд идущих букв) вида  $xw_1x \cdots w_kx$ , где все  $k$  соседей  $x$  в  $G$  встречаются в каждом

из  $w_i$ . Но тогда  $w$  содержит все паттерны длины  $k + 1$ , и частности, содержит  $\tau$ , противоречие.  $\square$

**Следствие 19** ([43]). *Пусть слово  $w$ , представляющее граф  $G$ , избегает некоторый паттерн длины  $k + 1$ . Если вершина  $y$  имеет степень не менее  $k$  и  $x$  смежна с  $y$ , то  $x$  встречается в  $w$  не более  $k + 1$  раза.*

## 4.1 132-представимые графы

В [21] было доказано, что минимальный по числу вершин непредставимый граф  $W_5$  также является минимальным 132-непредставимым графом (при этом, неизвестно, существуют ли другие 132-непредставимые графы на 6 вершинах).

**Теорема 20** ([21]). *Если граф  $G$  132-представим, то существует такое 132-избегающее слово  $w$ , представляющее  $G$ , что каждая буква в  $w$  встречается не более чем дважды.*

Из теорем 20 и 5 вытекает, что каждый 132-представимый граф является графом пересечения хорд. Отсюда, по теоремам 5 и 8 никакая призма  $Pr_n$ ,  $n \geq 3$ , не является 132-представимой. Естественно возникает вопрос, всякий ли граф пересечения хорд является 132-представимым. Следующая теорема дает отрицательный ответ на него.

**Теорема 21** ([43]). *Не все графы пересечения хорд 132-представимы. В частности, объединение двух графов  $K_4$  является 132-непредставимым графом пересечения хорд.*

**Теорема 22** ([21]). *Любое дерево 132-представимо.*

Отметим, что в случае представления графов в виде слов, избегающих паттернов, теорема 2 не всегда работает, поскольку расширение представляющего слова до равномерного может породить запрещенный паттерн. Например, хотя полный граф  $K_n$  можно представить 132-избегающим словом  $n(n - 1) \cdots 1$ , но, как было показано в [43], при  $n \geq 3$  этот граф нельзя представить в виде 2-равномерного 132-избегающего слова. Однако в [43] показано, что любое дерево можно представить 2-равномерным словом, тем самым усиливая теорему 22. Еще один результат про представление графа в виде равномерного 132-избегающего слова приведен в теореме 28 ниже.



**Теорема 23** ([21]). *Любой цикл 132-представим.*

*Доказательство.* Пометим вершины цикла  $C_n$  через  $1, 2, \dots, n$  по часовой стрелке и представим полученный граф в виде 132-избегающего слова  $(n-1)n(n-2)(n-1)(n-3)(n-2)\cdots 45342312$ .  $\square$

**Теорема 24** ([21]). *При  $n \geq 1$  полный граф  $K_n$  132-представим. Более того, при  $n \geq 3$  имеется*

$$2 + C_{n-2} + \sum_{i=0}^n C_i$$

*различных 132-представлений для  $K_n$ , где  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  — это  $n$ -е число Каталана. Кроме того,  $K_1$  может быть представлен словом вида  $11 \cdots 1$ , а  $K_2$  — словом вида  $1212 \cdots$  или  $2121 \cdots$  любой длины.*

Из доказательства теоремы 24 следует [21], что при  $n \geq 3$  длина представляющего 132-избегающего слова для  $K_n$  лежит в множестве  $\{n, n+1, n+2, n+3\}$ .

## 4.2 123-представимые графы

**Теорема 25** ([43]). *Любой 123-представимый граф является графом пересечения хорд.*

**Теорема 26** ([43]). *Любой цикл 123-представим.*

*Доказательство.* Слово, приведенное в доказательстве теоремы 23, очевидно также является и 123-избегающим.  $\square$

**Теорема 27** ([43]). *Звезда  $K_{1,6}$  не является 123-представимой.*

Нетрудно проверить, что  $K_{1,6}$  является графом пересечения хорд, так что не все такие графы 123-представимы. Также из теоремы 27 следует, что не все деревья 123-представимы. Заметим также, что звезда  $K_{1,5}$  123-представима в виде слова  $56465321412$ .

На основе теорем 21 и 27 можно легко построить граф пересечения хорд на 14 вершинах, который не является ни 123-, ни 132-представимым [43].

Заметим, что в отличие от 132-представимости, каждый полный граф  $K_n$  можно представить в виде 123-избегающего 2-униформного слова  $n(n-1)\cdots 1n(n-1)\cdots 1$ , как отмечено в [43]. Там же

показано, что путь  $P_n$  можно 123-представить в виде 2-униформного слова.

В завершение приведем общую теорему о представлении в виде униформного слова применительно к 123- и 132-представлениям.

**Теорема 28** ([43]). *Пусть паттерн  $\tau \in \{123, 132\}$  и  $G_1, G_2, \dots, G_k$  —  $\tau$ -представимые компоненты связности графа  $G$ . Тогда  $G$   $\tau$ -представим тогда и только тогда, когда не более одну из компонент нельзя  $\tau$ -представить в виде 2-униформного слова.*

## 5 Полутранзитивные ориентации и представимые графы

*Полуциклом* называется ориентированный граф, полученный из цикла заменой ориентации одного ребра. Другими словами, полуцикл представляет собой ориентированный путь  $x_1x_2 \dots x_n$  и дугу  $x_1x_n$ . Говорим, что полуцикл в ациклическом ориентированном графе образует *срез*, если он не порождает транзитивный подграф (т. е. в нем найдутся несмежные вершины  $x_i$  и  $x_j$ ). Ясно, что срез содержит не менее четырех вершин.

**Определение 8.** *Ориентация графа называется полутранзитивной, если она ациклическая и не содержит срезов.*

Из определения сразу следует, что всякая транзитивная ориентация является полутранзитивной. Обратное неверно, что легко видеть на примере ориентированного пути.

Как будет видно из теоремы 29, поиск полутранзитивной ориентации графа эквивалентен распознаванию его представимости в виде слова, а эта задача NP-полна (см. теорему 40). Поэтому эффективного способа построения полутранзитивной ориентации в общем случае скорее всего не существует.

Следующая теорема дает характеристику графов, представимых в виде слов, в терминах ориентаций.

**Теорема 29** ([28]). *Граф  $G$  представим в виде слова тогда и только тогда, когда  $G$  допускает полутранзитивную ориентацию.*

*Доказательство.* Сначала приведем доказательство в прямую сторону. Пусть  $G$  представим в виде  $k$ -униформного слова  $w$ . Ориентируем каждое ребро графа так, чтобы начальная вершина каждой

дуги появлялась в слове  $w$  раньше, чем конечная. Покажем, что такая ориентация полутранзитивна. Пусть в орграфе есть полупуть, включающий ориентированный путь  $x_1x_2 \dots x_t$  и дугу  $x_1x_t$ . Тогда для каждого  $i = 1, \dots, t-1$  и  $j = 1, \dots, k$ ,  $j$ -я копия буквы  $x_i$  встречается в  $w$  раньше  $j$ -й копии буквы  $x_{i+1}$ . А поскольку  $x_1x_t \in E$ , то  $(j+1)$ -я копия буквы  $x_1$  должна идти в  $w$  после  $j$ -й копии буквы  $x_t$  (для всех  $j = 1, \dots, k-1$ ). Следовательно, для любых  $i, j \in \{1, \dots, t\}$  буквы  $x_i$  и  $x_j$  чередуются в  $w$ , а значит полупуть ориентирован транзитивно, т. е.  $G$  не содержит среза.

Доказательство в обратную сторону довольно громоздко, поэтому приведем его схематически. Детальное описание алгоритма, строящего по полутранзитивной ориентации представление графа в виде слова, можно найти в [28].

Для любого подмножества  $A \subset V$  графа  $G = (V, E)$  назовем перестановку  $\pi$  над множеством  $A$  *правильной*, если для любой дуги  $uv \in E$ , где  $u, v \in A$  буква  $u$  встречается в  $\pi$  раньше  $v$ . Нетрудно видеть, что в ациклическом графе для любого подмножества вершин существует хотя бы одна правильная перестановка. Пусть задана полутранзитивная ориентация графа  $G = (V, E)$ . Рассмотрим произвольную вершину  $v \in V$ . Положим  $I(v) = \{x \mid xv \in E\}$  и  $O(v) = \{y \mid vy \in E\}$ . Обозначим через  $A(v)$  множество всех вершин из  $V \setminus I(v)$ , из которых имеется путь в вершину  $v$ , а через  $B(v)$  — множество всех вершин из  $V \setminus O(v)$ , в которые можно попасть из вершины  $v$ . Наконец, положим  $T(v) = V \setminus (A(v) \cup B(v) \cup I(v) \cup O(v) \cup \{v\})$ . Ввиду ациклическости ориентации, множества  $A(v), B(v), I(v), O(v)$  и  $T(v)$  попарно не пересекаются (при этом некоторые из них могут быть пустыми). Обозначим через  $A, B, I, O, T$  правильные перестановки для соответствующих множеств. В [28] доказано, что если ориентация полутранзитивна, то 2-униформное слово  $W(v) = AITAvOIvBTOB$  порождает такой граф  $H(v)$ , что  $G \subseteq H(v)$  и  $N_G(v) = N_{H(v)}(v)$ . Тогда конкатенация слов  $W(v)$  по всем вершинам представляет граф  $G$ .  $\square$

Из доказательства теоремы 29 вытекает оценка  $2n^2$  на длину минимального униформного слова, представляющего граф. Однако ее можно немного улучшить.

**Теорема 30** ([28]). *Пусть  $G$  — не полный, представимый в виде слова граф. Тогда он  $2(n - \kappa(G))$ -представим, где  $\kappa(G)$  — это размер максимальной клики в  $G$ .*

*Доказательство.* Пусть  $K$  — клика максимального размера в  $G$ . Рассмотрим конкатенацию  $W$  слов  $W(v)$  из доказательства теоремы 29 по всем вершинам  $v \in V \setminus K$ . Пусть  $W$  представляет граф  $H$ . Поскольку  $G$  является подграфом каждого из графов  $H(v)$ , то все ребра графа  $G$  присутствуют в  $H$ . С другой стороны, для любого ребра  $uv \notin E(G)$  хотя бы один из его концов (например,  $u$ ) не лежит в  $K$ . Но тогда  $uv \notin E(H(u))$ , а значит и  $uv \notin E(H)$ . Следовательно,  $H = G$ , т.е.  $G$  является  $2(n - \kappa(G))$ -представимым.  $\square$

Естественным следствием теоремы 30 является принадлежность задачи распознавания представимости графа в виде слова классу  $NP$ . Действительно, длина представляющего слова не превосходит  $2n^2$ , а чередование любой пары букв в слове проверяется за  $O(n^2)$  операций.

М.Халлдорсон показал, что проверка полутранзитивности ориентации также может быть выполнена за полиномиальное время и чисто графовыми методами (см. [34, Замечание 4.2.3]).

Следующая теорема показывает, что класс графов, представимых в виде слов включает в себя все 3-раскрашиваемые графы.

**Теорема 31** ([28]). *Любой 3-раскрашиваемый граф представим в виде слова.*

*Доказательство.* Пусть вершины графа раскрашены цветами 1, 2, 3. Ориентируем все ребра так, чтобы цвет начальной вершины был меньше цвета конечной. Очевидно, что эта ориентация полутранзитивна, так как она ациклична и любой путь имеет длину не больше 2 (а в срезе должно быть хотя бы 4 вершины). Значит по теореме 29 граф представим в виде слова.  $\square$

Из теоремы 31 и теоремы Брукса [18] следует, например, представимость всех графов максимальной степени 3 (в частности, графа Петерсена, что было показано ранее). Другие применения теоремы 31 можно найти ниже.

## 6 Непредставимые графы

В разделе 3 уже говорилось, что нечетные колеса  $W_{2n+1}$  непредставимы при  $n \geq 2$ , а  $W_5$  минимальный по числу вершин непредставимый граф. Учитывая наследственность класса представимых

графов, получаем, что весь класс  $\mathcal{W}$  графов, содержащих какое-либо колесо  $W_{2n+1}$  ( $n \geq 2$ ) в качестве индуцированного подграфа, является непредставимым. Заметим, что каждый граф из  $\mathcal{W}$  обязательно содержит вершину степени 5 или больше, а также треугольник. Естественно спросить, существуют ли непредставимые графы максимальной степени 4 или без треугольников. На оба эти вопроса ответ положительный. Граф на рисунке 4 справа, найденный в [17], отвечает на первый вопрос, а ответ на второй вопрос дает следующая конструкция, предложенная в работе [27].

Пусть  $M$  — 4-хроматический граф с охватом не меньше 10 (такие графы существуют по теореме Эрдеша [18, 34]). Для каждого пути длины 3 в  $M$  добавим к  $M$  ребро, соединяющее его концы. Тогда полученный граф без треугольников будет непредставимым [27].

## 6.1 Число непредставимых графов

Согласно вычислительному эксперименту, проведенному Х.З.К. Ченом, существуют 1, 25 и 929 неизоморфных непредставимых связанных графов на шести, семи и восьми вершинах соответственно. Эти результаты были подтверждены и распространены до девяти (68,545 графов) и десяти вершин (4,880,093 графов) с помощью методов целочисленного программирования [Э.Аркюн, И.Гент, К. Джефферсон, неопубликованный манускрипт].

На Рис. 7 представлены все 25 найденных Ченом неизоморфных непредставимых графов на семи вершинах. Отметим, что 15 из этих графов содержат  $W_5$  (единственный непредставимый граф на шести вершинах), так что лишь 10 непредставимых графов на семи вершинах на Рис. 7 являются минимальными.

## 6.2 Непредставимые реберные графы

*Реберным* графом для графа  $G = (V, E)$  называется граф с множеством вершин  $E$ , где две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра в  $G$  имеют общий конец; такой граф обозначается через  $L(G)$ . Реберные графы можно использовать для построения непредставимых графов, что следует из нижеприведенных теорем.

**Теорема 32** ([36]). *Пусть  $n \geq 4$ . Для любого колеса  $W_n$  его реберный граф  $L(W_n)$  непредставим.*

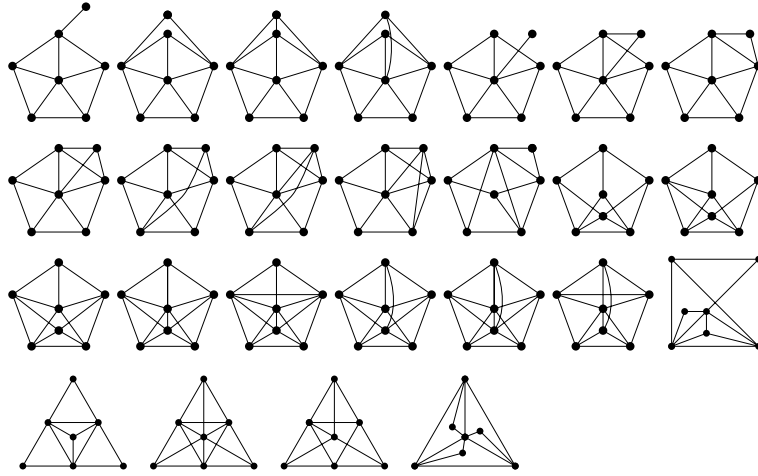


Рис. 7: 25 неизоморфных непредставимых графов на 7 вершинах

**Теорема 33** ([36]). Пусть  $n \geq 5$ . Тогда для любого полного графа  $K_n$  его реберный граф  $L(K_n)$  непредставим.

Следующая теорема позволяет с помощью операции перехода к реберным графам превратить любой граф в непредставимый.

**Теорема 34** ([36]). Если связный граф  $G$  не является путем, циклом или звездой  $K_{1,3}$ , то граф  $L^n(G)$  непредставим при  $n \geq 4$ .

## 7 Представление графов в виде слов и операции на графах

В этом разделе мы рассмотрим некоторые основные операции на графах, в частности, дополнение графа, подразбиение ребер, стягивание ребер, соединение двух графов ребром, склеивание двух графов по клике, замена вершины модулем, декартово произведение, корневое произведение и переход к реберным графам.

Мы не рассматриваем добавление/удаление ребер, которые очевидно не сохраняют (не)представимость графа в виде слова, хотя в некоторых ситуациях они и могут ее сохранять. Например, как показано в [30], удаление ребер сохраняет представимость графа в виде слов для представимых графов, не содержащих индуцированного подграфа  $K_4$ .

**1. Дополнение.** Дополнение к представимому графу может как быть, так и не быть представимым в виде слова. Например, для любого графа на 5 вершинах, его дополнение представимо в виде слова. С другой стороны, дополнение непредставимого графа  $W_5$  представляет собой объединение 5-цикла и изолированной вершины, а значит являются представимым (например, в виде слова 112542643653). Нетрудно также построить пример непредставимого графа, чье дополнение также непредставимо. Например граф  $G = W_5 \cup C_5 \cup K_1$  обладает таким свойством, поскольку и он сам, и его дополнение содержат  $W_5$  в качестве индуцированного подграфа.

**2. Подразбиение и стягивание ребер.** Подразбиение графа получается подразбиением его отдельных ребер, и рассматривалось в разделе 2.3 с точки зрения 3-представимости. Заменяя в теореме 11 “3-представимый” на “представимый в виде слова” мы получим более слабое, но верное утверждение, которое нетрудно доказать напрямую через полу-транзитивные ориентации. Действительно, ориентируя путь длины 3 так, чтобы его внутренние вершины образовали источник и сток степни 2, мы никак не сможем создать в графе ни ориентированного цикла, ни среза. Следующая теорема показывает, что для некоторых классов графов подразбиение ребер сохраняет представимость, а для некоторых нет.

**Теорема 35** ([30]). *Подразбиение ребер сохраняет представимость в виде слова для графов, не содержащих подграфа  $K_4$ . При этом, существуют представимые графы, не содержащие подграфа  $K_5$ , подразбиение которых непредставимо.*

По теореме 11 стягивание ребра в представимом графе может привести к непредставимому графу, хотя для некоторых классов (например, для путей) эта операция сохраняет представимость. Стягивание ребра непредставимого графа может также привести как к представимому, так и к непредставимому графу. Например, стягивание любого ребра  $W_5$  дает представимый граф, а в непредставимом графе, состоящем из двух копий  $W_5$ , стягивание любого ребра приводит к непредставимому графу.

**3. Соединение графов ребром и склеивание по клике.** Поскольку представимость является наследственным свойством, ясно, что если хотя бы один из двух графов непредставим, то и в результате их склейки по клике или соединения ребром также получится непредставимый граф.

С другой стороны, пусть графы  $G_1$  и  $G_2$  представимы. Тогда склеивание их по одной вершине или соеинение ребром даст представимый граф. Последнее утверждение легко показать через полугранзитивные ориентации. Действительно, по теореме 29 и  $G_1$ , и  $G_2$  можно ориентировать полугранзитивно, а склеивание графов по вершине или соединении их ребром (ориентированным произвольно) не приведет к образованию циклов или срезом. Более того, в [32] было показано, что если  $G_i$  является  $k_i$ -представимым ( $i = 1, 2$ ), то графы, полученные склеиванием  $G_1$  и  $G_2$  по вершине и соединением их по ребру являются  $\max(k_1, k_2)$ -представимыми.

К сожалению, склеивание представимых графов по клике размера больше 1 может привести к непредставимым графам. Соответствующие примеры для клик размера 2 (ребро) и 3 (треугольник) можно найти в [34, Section 5.4.3]. Склеивание представимых графов по кликам большего размера остается открытым вопросом.

**4. Замена вершины модулем.** Подмножество вершин  $X \subseteq V$  в графе  $G$  образует *модуль*, если все вершины из  $X$  имеют одно и то же множество соседей вне  $X$  (т. е., в  $V \setminus X$ ). Операция замены вершины  $x$  графа  $G$  модулем  $H$  заключается в удалении из  $G$  вершины  $x$ , добавлении графа  $H$  и всех ребер вида  $yz$ , где  $y \in H$ ,  $z \in N(x)$ . Например, Рис. 8 показывает замену вершины 1 в треугольной призме на модуль  $K_3$  с вершинами  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

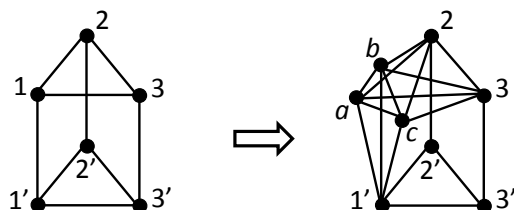


Рис. 8: Замена вершины модулем

**Теорема 36** ([32]). Пусть граф  $G$  представим в виде слова и  $x \in V(G)$ . Пусть  $G'$  получен из  $G$  заменой  $x$  модулем  $M$ , где  $M$  является графом сравнимости. Тогда  $G'$  также представим в виде слова. Более того, если  $\mathcal{R}(G) = k_1$  и  $\mathcal{R}(M) = k_2$ , то  $\mathcal{R}(G') = k$ , где  $k = \max\{k_1, k_2\}$ .

**5. Декартово произведение графов.** Декартовым произведением  $G \square H$  графов  $G = (V(G), E(G))$  и  $H = (V(H), E(H))$



называется граф с множеством вершин  $V(G) \times V(H)$ , в котором вершины  $(u, u')$  и  $(v, v')$  смежны тогда и только тогда, когда

- $u = v$  и  $u'$  смежна с  $v'$  в  $H$ , или
- $u' = v'$  и  $u$  смежна с  $v$  в  $G$ .

Доказательство следующей теоремы было найдено Б.Саганом в 2014 году [48]. Доказательство через полутранзитивные ориентации можно найти в [34, Section 5.4.5].

**Теорема 37** (Sagan). *Пусть  $G$  и  $H$  представимы в виде слов. Тогда и их декартово произведение  $G \square H$  представимо в виде слова.*

**6. Корневое произведение графов.** Пусть имеются графы  $G$  и  $H$ , причем одна из вершин графа  $H$  выделена в качестве корня. Тогда *корневым произведением* графа  $G$  и графа  $H$  называется граф  $G \circ H$ , определяемый следующим образом: рассматривается  $|V(G)|$  копий графа  $H$  и каждая вершина  $v_i$  графа  $G$  склеивается с корнем  $i$ -й копии графа  $H$ .

Следующая теорема аналогична теореме 37.

**Теорема 38** ([34]). *Пусть  $G$  и  $H$  представимы в виде слов. Тогда их корневое произведение  $G \circ H$  также представимо (для любого выбора корня).*

*Доказательство.* Поскольку склеивание  $v_i$  в  $G$  с корнем  $i$ -й копии графа  $H$  сохраняет представимость графа в виде слова, то произведя эту операцию для всех вершин графа  $G$ , получим представимый граф  $G \circ H$ .  $\square$

**7. Переход к реберному графу.** Эта операция уже рассматривалась выше в разделе 6.2. На основании этих результатов видно, что при переходе к реберному графу представимый граф может стать как представимым, так и непредставимым. Также известны примеры непредставимых графов, чьи реберные графы непредставимы. Однако, до сих пор неизвестно, существует ли непредставимый граф, реберный к которому был бы представим.

## 8 Вопросы вычислительной сложности

В этом разделе мы представим результаты, касающиеся вычислительной сложности задачи, а именно, сложность распознавания

Задача	Сложность
Распознавание представимости графа в виде слова	NP-полна
Приближение числа представимости графа с точностью $n^{1-\epsilon}$ для любого $\epsilon > 0$	NP-трудна
Кликовое покрытие	NP-трудна
Определить, является ли граф $k$ -представимым для любого фиксированного $k$ , $3 \leq k \leq \lceil n/2 \rceil$	NP-полна
Доминирующее множество	NP-трудна
Раскраска вершин	NP-трудна
Максимальная клика	В классе P
Максимальное независимое множество	NP-трудна

Таблица 2: Известные результаты по сложности для представимых графов

класса представимых графов и сложность некоторых классических NP-трудных задач на графах из этого класса.

Хотя задача о максимальной клике полиномиально разрешима в классе представимых графов (теорема 17), многие классические оптимизационные задачи остаются в этом классе NP-трудными. Это следует из теоремы 31 и того, что соответствующие проблемы NP-трудны для 3-раскрашиваемых графов.

Обоснование представленных в таблице 2 известных результатов по сложности, а также строгие формулировки задач можно найти в [34, Section 4.2]. Ниже мы обсудим доказательство того факта, что задача определения представимости графа в виде слова является NP-трудной.

Пусть  $P$  является частично упорядоченным множеством, а  $x$  и  $y$  — два его элемента. Говорим, что  $x$  покрывает  $y$ , если  $x > y$  и нет такого элемента  $z$  в  $P$ , что  $x > z > y$ .

Граф покрытий  $G_P$  частично упорядоченного множества  $P$  имеет множество вершин  $P$ , причем  $xy$  является ребром в  $G_P$  тогда и только тогда, когда  $x$  покрывает  $y$  или наоборот. Диаграммой Хассе частично упорядоченного множества  $P$  называется изображение графа покрытий  $G_P$  на плоскости, при котором  $x$  находится выше  $y$  если  $x$  покрывает  $y$  в  $P$ .

В.Лимузи заметил в 2014 году [40], что полутранзитивные ориентации графов без треугольников в точности совпадают с 2-хорошими

ориентациями, рассмотренными Претцелем в [46] (там же можно найти определение  $k$ -хороших ориентаций). Поэтому из утверждения 1 в [46] вытекает следующая теорема.

**Теорема 39** (Limouzy). *Класс представимых в виде слов графов без треугольников — это в точности класс графов покрытий частично упорядоченных множеств.*

Лимузи также указал, что задача распознавания графов покрытий частично упорядоченных множеств является NP-полной [10]. Отсюда вытекает следующая ключевая теорема.

**Теорема 40** (Limouzy). *Задача распознавания графов, представимых в виде слов NP-полна.*

## 9 Представление плоских графов в виде слов

Что касается плоских графов, то, очевидно, не все они представимы в виде слова (например, все нечетные колеса  $W_{2n+1}$  непредставимы). Однако, имеет место следующая

**Теорема 41** ([27]). *Плоские графы без треугольников представимы.*

*Доказательство.* По теореме Грёцша [50], каждый плоский граф без треугольников 3-раскрашиваем, а значит представим в виде слова по теореме 31.  $\square$

Классификация представимых плоских графов является интересной открытой проблемой. Далее рассматриваются некоторые виды триангуляций и подразбиений плоских графов. Ключевыми инструментами при их рассмотрении являются 3-раскрашиваемость и полутранзитивные ориентации.

### 9.1 Представление в виде слов триангуляций полимино

*Полимино* — это плоская геометрическая фигура сформированная некоторым числом одинаковых квадратов, присоединенных друг к другу по ребрам. Если углы квадратов считать вершинами, а

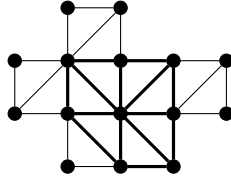


Рис. 9: Нечетное колесо в триангуляции полимино

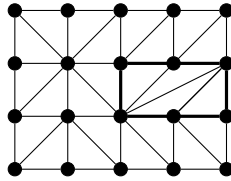


Рис. 10: Триангуляция прямоугольника с домино

стороны — ребрами, то получится граф, который мы также будем называть полимино. Наиболее интересны *выпуклые полимино*, т. е. такие, в которых множество квадратов любого ряда (горизонтального или вертикального) образует связную область. Под *триангуляцией* полимино понимается триангуляция всех его внутренних граней.

При триангуляции всех внутренних граней выпуклого полимино может образоваться нечетное колесо (см. Рис. 9). Оказывается, отсутствие таких колес влечет 3-раскрашиваемость, а значит и представимость полученной триангуляции, что составляет основную идею доказательства следующей теоремы.

**Теорема 42** ([1]). *Триангуляция выпуклого полимино представима тогда и только тогда, когда она 3-раскрашиваема. Существуют не 3-раскрашиваемые триангуляции невыпуклых полимино, представимые в виде слов.*

Назовем прямоугольником с домино фигуру, полученную из прямоугольного полимино удалением одного из внутренних ребер (см. Рис. 10).

**Теорема 43** ([24]). *Триангуляция любого прямоугольника с домино представима тогда и только тогда, когда она 3-раскрашиваема.*

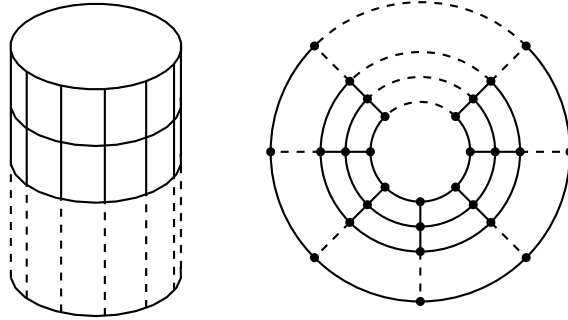


Рис. 11: Цилиндрическая решетка

## 9.2 Представление почти триангуляций в виде слов

*Почти триангуляция* — это планарный граф, в котором каждая внутренняя грань является треугольником (рассмотренные выше триангуляции полимино являются на самом деле почти триангуляциями).

Следующая теорема обобщает теоремы 42 и 43.

**Теорема 44** ([22]). *Почти триангуляция без  $K_4$  представима в виде слова тогда и только тогда, когда она 3-раскрашиваема.*

Характеризация представимых в виде слов почти триангуляций, содержащих  $K_4$ , остается открытой проблемой.

## 9.3 Триангуляция цилиндрических решеток

*Цилиндрическая решетка*, — это граф, образованный вертикальными (параллельными образующим) отрезками и горизонтальными (параллельными плоскостям основания) окружностями на поверхности цилиндра. Цилиндрическая решетка также получается склеиванием левого и правого концов прямоугольной решетки (см. Рис. 11). Часть решетки, заключенная между двумя соседними вертикальными отрезками называется *сектором*. Под триангуляцией цилиндрической решетки будем понимать триангуляцию всех граней, лежащих в объединении секторов (т. е. всех граней, кроме двух оснований).

Представимость триангуляций цилиндрических решеток полностью характеризуется следующими двумя теоремами (в зависимости от числа секторов).

**Теорема 45** ([15]). *Триангуляция цилиндрической решетки с более чем тремя секторами представима тогда и только тогда, когда она не содержит  $W_5$  или  $W_7$  в качестве индуцированного подграфа.*

**Теорема 46** ([15]). *Триангуляция цилиндрической решетки с тремя секторами представима тогда и только тогда, когда она не содержит ни один из графов на Рис. 12 в качестве индуцированного подграфа.*

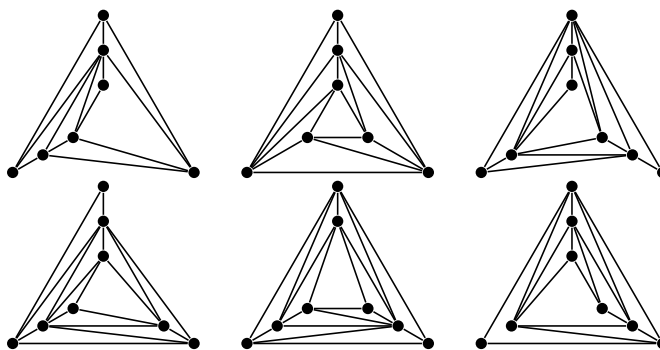


Рис. 12: Запрещенные подграфы для триангуляций цилиндрических решеток с тремя секторами

## 9.4 Подразбиения графов треугольной решетки

Граф треугольного замощения  $T^\infty$  — это бесконечный граф, индуцированный замощением плоскости равносторонними треугольниками. Граф треугольной решетки  $G$  получается из  $T^\infty$  выбором произвольного конечного числа треугольных ячеек и включением в  $G$  всех их вершин и ребер. Говорим, что ячейка *входит* в  $G$ , если все ее ребра принадлежат  $G$ .

Операция *подразбиения ячейки* заключается в добавлении внутрь ячейки вершины и трех ребер, соединяющих ее с вершинами ячейки (другими словами, ячейка заменяется на плоскую копию графа

$K_4$ ). Соответственно, подразбиение множества ячеек  $S$  получается последовательным подразбиением каждой ячейки из  $S$  (при этом, само множество  $S$  называется *подразбиваемым множеством*). Подразбиением графа треугольной решетки называется граф, полученный подразбиением некоторого множества ячеек.

Если подразбиение  $G$  является представимым в виде слова, то и соответствующее ему подразбиваемое множество будет называться представимым. Говорим, что подразбиваемое множество максимально, если подразбиение любой другой ячейки приводит к непредставимому графу.

Ребро графа треугольной решетки  $G$ , которое принадлежит ячейке из  $T^\infty$ , не входящей в  $G$  называется *граничным*. Ячейка, содержащая хотя бы одно граничное ребро, называется *граничной*; остальные ячейки в  $G$  называются *внутренними*.

Нетрудно заметить, что при подразбиении внутренней ячейки получается индуцированный подграф, изображенный в нижнем левом углу на Рис. 7. Следовательно, подразбиение любой внутренней ячейки приводит к непредставимому графу. Оказывается, это единственное препятствие для представимости подразбиения графа треугольной решетки.

**Теорема 47** ([14]). *Подразбиение графа треугольной решетки  $G$  представимо тогда и только тогда, когда подразбиваемое множество не содержит внутренних ячеек графа  $G$ .*

Отметим, что теорему 47 можно также применить для поиска максимальных представимых подразбиений ячеек двумерного треугольника Серпинского  $SG(n)$  (детали можно найти в [14]).

## 10 Направления дальнейших исследований

В этом разделе перечисляются открытые проблемы и направления дальнейших исследований, связанный с графами, представимыми в виде слов.

- Охарактеризовать (не-)представимые плоские графы.
- Охарактеризовать представимые почти триангуляции, содержащие  $K_4$ .

- Описать все графы, представимые в виде слов, избегающих паттерн  $\tau$ , где понятие “паттерн” можно определять разными способами (см. [11, 31]).
- Правда ли, что граф-корона имеет самое длинное представляющее слово среди всех двудольных графов с заданным четным числом вершин?
- Существуют ли представимые  $n$ -вершинные графы, представление которых требует более  $\lfloor n/2 \rfloor$  копий каждой буквы?
- Является ли реберный граф непредставимого графа всегда непредставимым?
- Охарактеризовать представимые графы на языке запрещенных подграфов.

Последняя проблема представляется наиболее фундаментальной.

## Список литературы

- [1] P. Akrobtu, S. Kitaev, Z. Masárová. On word-representability of polyomino triangulations. *Siberian Adv. Math.* **25** (2015) 1, 1–10.
- [2] E. Babson and E. Steingrímsson. Generalized permutation patterns and a classification of the Mahonian statistics, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B44b:18pp, 2000.
- [3] J. Balogh, B. Bollobás, D. Weinreich. A jump to the Bell number for hereditary graph properties. *J. Combin. Theory Ser. B* **95** (2005) 29–48.
- [4] R. Beigel, D. Eppstein. 3-coloring in time  $O(1.3289n)$ . *J. Algorithms* **54** (2) (2005) 168–204.
- [5] J. Berstel, J. Karhumáki. Combinatorics on words — a tutorial. *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS*, 79:178–228, 2003.
- [6] J. Berstel, D. Perrin The origins of combinatorics on words. *European Journal of Combinatorics*. 28 (3): 996–1022.
- [7] E. J. L. Bell, P. Rayson, D. Berridge. The strong-connectivity of word-representable digraphs, arXiv:1102.0980, 2011.
- [8] I. M. Bomze, M. Budinich, P. M. Pardalos, M. Pelillo. “The maximum clique problem”, *Handbook of Combinatorial Optimization*, 4, Kluwer Academic Publishers (1999) 1–74.



- [9] M. Bóna. *Combinatorics of Permutations*, Chapman & Hall/CRC, NY, 2004.
- [10] G. Brightwell. On the complexity of diagram testing. *Order*, 10(4):297–303, 1993.
- [11] P. Brändén and A. Claesson. Mesh patterns and the expansion of permutation statistics as sums of permutation patterns, *Elect. J. Comb.* **18(2)** (2011), #P5, 14pp.
- [12] J. Černý. Coloring circle graphs. *Electronic Notes in Discr. Math.* **29** (2007) 457–461.
- [13] V. Chvátal, Hammer. Aggregation of inequalities in integer programming, *Studies in Integer Programming Ann. of Discrete Math.* **1** (1977) 145–162.
- [14] T. Z. Q. Chen, S. Kitaev, B. Y. Sun. Word-representability of face subdivisions of triangular grid graphs. *Graphs and Combinatorics* **32(5)** (2016) 1749–1761.
- [15] T. Z. Q. Chen, S. Kitaev, B. Y. Sun. Word-representability of triangulations of grid-covered cylinder graphs. *Discr. Appl. Math.* **213(C)** (2016) 60–70.
- [16] A. Claesson. Generalised pattern avoidance, *European J. of Combin.* **22** (2001), 961–971.
- [17] A. Collins, S. Kitaev, V. Lozin. New results on word-representable graphs. *Discr. Appl. Math.* **216** (2017) 136–141.
- [18] Diestel R. *Graph Theory*, GTM 173, 5th edition 2016. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [19] C. G. Fernandes, E. L. Green, A. Mandel. From monomials to words to graphs. *J. Combin. Theory Ser. A* **105** (2004) 2, 185–206.
- [20] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. San Francisco: Freeman, 1979. 314 P.
- [21] A. Gao, S. Kitaev, P. Zhang. On 132-representable graphs. arXiv:1602.08965 (2016)
- [22] M. Glen. Colourability and word-representability of near-triangulations. arXiv:1605.01688 (2016)
- [23] M. Glen. Software available at [personal.cis.strath.ac.uk/sergey.kitaev/word-representable-graphs.html](http://personal.cis.strath.ac.uk/sergey.kitaev/word-representable-graphs.html)

- [24] M. Glen, S. Kitaev. Word-representability of triangulations of rectangular polyomino with a single domino tile. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, to appear.
- [25] R. Graham, N. Zang. Enumerating split-pair arrangements, *J. Combin. Theory, Series A* **115**, Issue 2 (2008), 293–303.
- [26] M. Halldórsson, S. Kitaev, A. Pyatkin. Graphs capturing alternations in words. *Lecture Notes Comp. Sci.* **6224** (2010) 436–437.
- [27] M. Halldórsson, S. Kitaev, A. Pyatkin. Alternation graphs. *Lecture Notes Comp. Sci.* **6986** (2011) 191–202.
- [28] M. Halldórsson, S. Kitaev, A. Pyatkin. Semi-transitive orientations and word-representable graphs. *Discr. Appl. Math.* **201** (2016) 164–171.
- [29] M. Jones, S. Kitaev, A. Pyatkin, J. Remmel. Representing graphs via pattern avoiding words. *Electron. J. Combin.* **22(2)** (2015), #P2.53, 20 pp.
- [30] J. Kim, M. Kim. Graph orientations on word-representable graphs. In preparation.
- [31] S. Kitaev. Patterns in permutations and words, *Springer*, 2011.
- [32] S. Kitaev. On graphs with representation number 3. *J. Autom., Lang. and Combin.* **18** (2013) 2, 97–112.
- [33] S. Kitaev. Existence of  $u$ -representation of graphs, *J. Graph Theory*, to appear.
- [34] S. Kitaev, V. Lozin. Words and Graphs, *Springer*, 2015.
- [35] S. Kitaev, A. Pyatkin. On representable graphs. *J. Autom., Lang. and Combin.* **13** (2008) 1, 45–54.
- [36] S. Kitaev, P. Salimov, C. Severs, H. Úlfarsson. On the representability of line graphs. *Lecture Notes Comp. Sci.* (2011)
- [37] S. Kitaev, S. Seif. Word problem of the Perkins semigroup via directed acyclic graphs. *Order* **25** (2008) 3, 177–194.
- [38] M. Koebe. On a new class of intersection graphs. *Ann. Discrete Math.* **51** (1992) 141–143.
- [39] N. Korpelainen, V. Lozin. Two forbidden induced subgraphs and well-quasi-ordering. *Discrete Math.* **311** (2011) 16, 1813–1822.
- [40] V. Limouzy. Private communication, 2014.

- [41] L. Lovász. Perfect graphs. *Selected Topics in Graph Theory*, 2, London: Academic Press (1983) 55–87.
- [42] A. Marcus and G. Tardos. Excluded permutation matrices and the Stanley-Wilf conjecture, *J. Combin. Theory Ser. A* **107** (2004) 1, 153–160.
- [43] Y. Mandelshtam. On graphs representable by pattern-avoiding words. arXiv:1608.07614. (2016)
- [44] P. Perkins. Bases for equational theories of semigroups. *Journal of Algebra*, **11(2)** (1969) 298–314.
- [45] M. Petkovšek. Letter graphs and well-quasi-order by induced subgraphs. *Discrete Math.* **244** (2002) 375–388.
- [46] O. Pretzel. On graphs that can be oriented as diagrams of ordered sets. *Order* **2** (1985) 1, 25–40.
- [47] H. Prüfer. Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. *Arch. Math. Phys.* **27** (1918) 742–744.
- [48] B. Sagan. Private communication, 2014.
- [49] E. Steingrímsson. Generalized permutation patterns – a short survey, “Permutation Patterns”, *London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press* (2010) 137–152.
- [50] C. Thomassen. A short list color proof of Grötzsch’s theorem. *J. Combin. Theory, Ser. B* **88(1)** (2003) 189 – 192.
- [51] West D.B. *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2001.